ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MÔNG THỊ NGUYỆT

BÀI TOÁN CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT THUẦN NHẤT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MÔNG THỊ NGUYỆT

BÀI TOÁN CAUCHY ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT THUẦN NHẤT

Chuyên ngành: Toán giải tích

Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: TS. PHẠM THỊ THỦY

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Luận văn chưa từng được công bố trong bất cứ công trình nào.

Tác giả

Mông Thị Nguyệt

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Thị Thủy. Nhân dịp này em xin cám ơn Cô về sự hướng dẫn nhiệt tình và sự truyền thụ những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường THPT Thái Nguyên cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy rất mong được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, tháng 04 năm 2016

Tác giả luận văn

Mông Thị Nguyệt

Mục lục

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Trong số lớp phương trình đạo hàm riêng tuyến tính, phương trình dạng parabolic là lớp phương trình mô tả các quá trình truyền nhiệt, khuyếch tán. Bài toán này được nghiên cứu từ rất lâu và lý thuyết của nó đến nay tương đối hoàn chỉnh. Khi nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt, nhà toán học Pháp Poisson đã thiết lập công thức tính nghiệm, hiện nay mang tên ông và có nhiều ứng dụng.Với mong muốn tìm hiểu sâu hơn về phương pháp biến đổi Fourier và áp dụng các kết quả đạt được trong việc nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất, chúng tôi chọn ***" Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt thuần nhất"*** làm đề tài nghiên cứu của mình.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu.

2.1. Mục đích nghiên cứu

Nghiên cứu phương pháp biến đổi Fourier và áp dụng trong việc giải bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung vào các nhiệm vụ chính sau đây:

- Trình bày tổng quan về phương trình đạo hàm riêng và biến đổi Fourier trong $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}^n)$, cùng với các tính chất của chúng.
- Tìm nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất với hệ số hằng trong $\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^n$ và hệ số chỉ phụ thuộc biến thời gian trong $\mathbf{R}^n$.
- Trình bày công thức Poisson cho nghiệm tường minh bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất thông qua một số ví dụ.

3. Phương pháp nghiên cứu.

Sử dụng phương pháp phương trình đạo hàm riêng, các phương pháp biến đổi Fourier, phương pháp giải tích để nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất.

4. Bố cục của luận văn.

Nội dung luận văn gồm 42 trang trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số kiến thức chuẩn bị để thực hiện nội dung của chương sau: phân loại phương trình đạo hàm riêng, trình bày hệ thống về phép biến đổi Fourier trong $\mathscr{L}^1(\mathbf{R}^n)$, $\mathscr{L}^2(\mathbf{R}^n)$, các công thức đơn giản của biến đổi Fourier, biến đổi Fourier của một vài hàm số đơn giản.

Chương 2: Là nội dung chính của luận văn. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất với hệ số hằng trong $\mathbf{R}^1$ và $\mathbf{R}^n$. Tiếp đến là việc mở rộng bài toán Cauchy cho phương trình truyền nhiệt thuần nhất với hệ số chỉ phụ thuộc biến thời gian trong $\mathbf{R}^n$ và giải một số ví dụ.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, ta sẽ nhắc lại một số kiến thức quan trọng làm nền tảng để nghiên cứu chương sau. Đó là các kiến thức về phương trình đạo hàm riêng và biến đổi Fourier. Các nội dung trong chương được trích dẫn từ các tài liệu tham khảo [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7].

1.1 Phân loại phương trình đạo hàm riêng

1.1.1 Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Định nghĩa 1.1.1.1. Giả sử $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hàm xác định trong $\mathbf{R}^n$. Một phương trình liên hệ giữa ẩn hàm $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, các biến độc lập $x_1, x_2, ..., x_n$ và các đạo hàm riêng của nó được gọi là phương trình đạo hàm riêng. Phương trình có dạng:

$$F(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}, ...) = 0.$$

Định nghĩa 1.1.1.2. Giả sử $u = u(x, y)$ là hàm xác định trong $\mathbf{R}^2, a(x, y), b(x, y), c(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến là phương trình có dạng:

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

a) Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Xét phương trình tuyến tính cấp hai với các hệ số thực

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \quad (1.1.1)$$

Xét một điểm (x_0, y_0) cố định. Phương trình (1.1.1) tại điểm (x_0, y_0) được gọi là:

- Thuộc loại elliptic nếu như tại điểm đó: $b^2 - ac < 0$

- Thuộc loại hyperbolic nếu như tại điểm đó: $b^2 - ac > 0$

- Thuộc loại parabolic nếu như tại điểm đó: $b^2 - ac = 0$

Nếu phương trình (1.1.1) tại mọi điểm trong một miền G đều thuộc cùng một loại thì ta nói rằng phương trình ấy thuộc loại đó trong miền G.

b) Dạng chính tắc của phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp hai biến

Ta có thể đưa phương trình (1.1.1) về các dạng chính tắc sau:

- Với $b^2 - ac > 0$ thì dạng chính tắc của phương trình loại hyperbolic là:

$$u_{xx} - u_{yy} = \phi \text{ hay } u_{xx} = \phi.$$

- Với $b^2 - ac < 0$ thì dạng chính tắc của phương trình loại elliptic là:

$$u_{xx} + u_{yy} = \phi.$$

- Với $b^2 - ac = 0$ thì dạng chính tắc của phương trình loại parabolic là:

$$u_{xx} = \phi.$$

1.1.2 Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp nhiều biến

Định nghĩa 1.1.2.1. Giả sử $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ là hàm xác định trong $\mathbf{R}^n$. Phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp n - biến là phương trình có dạng:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + F(x_1, ..., x_n, u, u_{x_1}, ..., u_{x_n}) = 0 \tag{1.1.2}$$

với $a_{ij} = a_{ji}$ và là hàm của các biến $x_1, ..., x_n$. Ký hiệu $x = (x_1, ..., x_n)$ là điểm trong không gian Ơ – clit n chiều.

a) Phân loại phương trình tuyến tính cấp hai trong trường hợp nhiều biến

Xét ma trận :

$$A(x) = \|a_{ij}(x)\|. \tag{1.1.3}$$

Coi (1.1.3) là một ma trận đối xứng. Ta cố định một điểm $x_0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$. Khi đó ma trận $A(x)$ trở thành ma trận hằng $A(x_0)$.